МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению лабораторных работ

для студентов II курса
направления 09.03.01
очной формы обучения

Москва-2016

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики
А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению лабораторных работ

для студентов II курса
направления 09.03.01
очной формы обучения

Москва-2016

ББК 518
С17

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент О.Г. Илларионова

Самохин А.В., Дементьев Ю.И.
С17 Математическая логика. Пособие по выполнению лабораторных работ. - М.: МГТУ ГА, 2016. - 20 с.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» по учебному плану для студентов II курса направления 09.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 14.09.2016 г. и методического совета 25.10.2016 г.

Лабораторная работа №1
Сравнение асимптотических формул Пуассона и Лапласа для биномиального распределения. Повторные испытания с переменной вероятностью успеха

> $n := 30; p := 0.8; q := 1 - p;$
#параметры биномиального (Бернулли) распределения

$$n := 30$$
$$p := 0.8$$
$$q := 0.2$$

> $R := \mathrm{pointplot}\left(\left\{\mathrm{seq}\left(\left[k, \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}\right], k = 0..n\right)\right\},\right.$
$\mathrm{gridlines} = \mathrm{true}, \mathrm{color} = \mathrm{blue}, \mathrm{symbolsize} = 20, \mathrm{legend}$
$\left. = \mathrm{Bernoilli}\right)$#и его график

$S := \mathrm{plot}\left(\frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(x - n \cdot p)^2}{2 \cdot n \cdot p \cdot q}}, x = 0..30, \mathrm{color} = \mathrm{red}, \mathrm{legend}\right.$
$\left. = \mathrm{Laplace}\right);$ # Приближение Лапласа

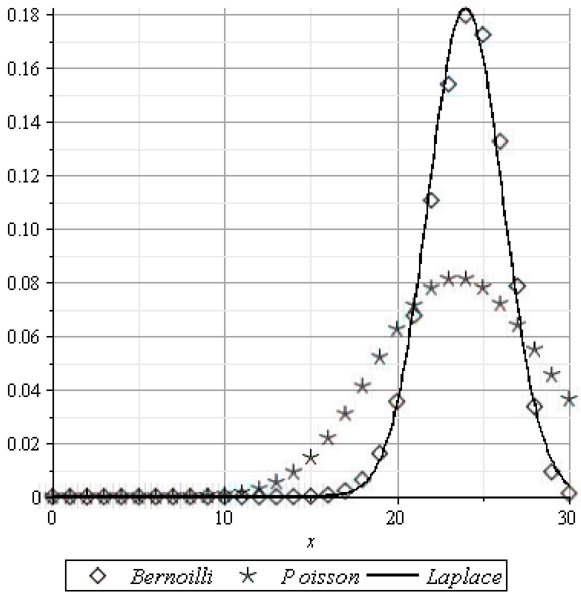
$T := \mathrm{pointplot}\left(\left\{\mathrm{seq}\left(\left[k, \frac{(n \cdot p)^k}{k!} e^{-n \cdot p}\right], k = 0..n\right)\right\}, \mathrm{gridlines}\right.$
$= \mathrm{true}, \mathrm{color} = \mathrm{green}, \mathrm{symbol} = \mathrm{asterisk}, \mathrm{symbolsize} = 20, \mathrm{legend}$
$\left. = \mathrm{Poisson}\right)$# Приближение Пуассона

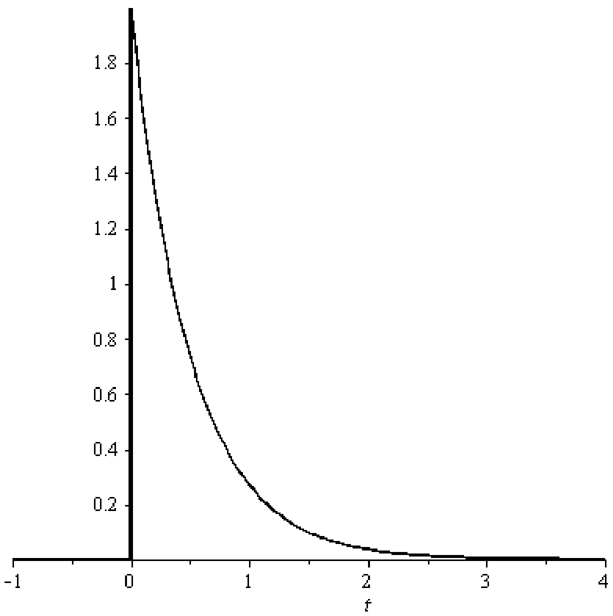
> plots[display](R, S, T);
Сравнение приближений Пуассона и Лапласа с биномиальным распределением на графике

> $\lambda := 2;$ #параметр показательного распределения

> $plot\left(piecewise\left(t > 0, \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, 0\right), t = -1 ..4\right);$

#График показательногоо распределения





> $M_X := \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \, dt;$

Мат.ожидание и среднеквадратичное отклонение показательногоо распределения

$$M_X := \frac{1}{2}$$

> $$\sigma_X := \sqrt{\int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}\, dt - M_X^2}$$

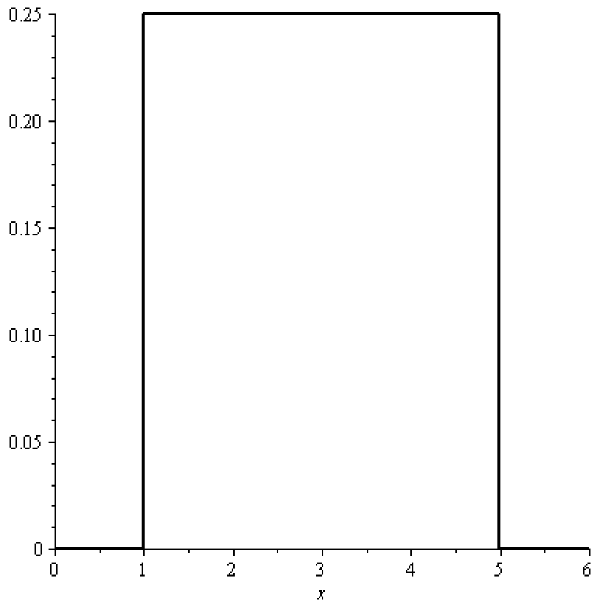
$$\sigma_X := \frac{1}{2}$$

a := 1; b := 5; #параметры равномерного распределения

1

5

> $\mathrm{plot}\left(\mathrm{piecewise}\left(x < b \text{ and } x > a, \frac{1}{(b-a)}, 0\right), x = 0..6\right);$
#График равномерного распределения



> $M_Y := \int_a^b x \cdot \frac{1}{(b-a)}\, dx;$
Мат.ожидание и среднеквадратичное отклонение равномерного распределения

$$M_Y := 3$$

> $\sigma_Y := \sqrt{\int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{(b-a)}\, dx - M_Y^2};$

$$\sigma_Y := \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$m := 5; \sigma := 1$

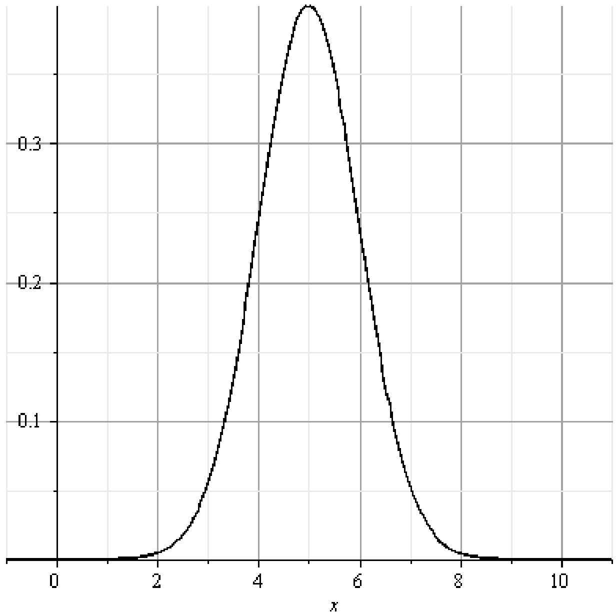
#параметры одномерного нармального Гауссового распределения N(m,σ)

5

1

$$> plot\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x=-1..11, gridlines=true\right);$$

#График одномерного нармального распределения



$$> M_Z := \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx;$$

Мат.ожидание и среднеквадратичное отклонение Гауссового распределения

5

$$\sigma_Z := \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx - M_Z^2}$$

1

$$\text{for i from 1 by 1 to 3 do evalf}\left(\int_{m-i\cdot\sigma}^{m+i\cdot\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx\right)\text{;od ;}$$

#Правило 1,2,3 сигма

$$> m_x := 3; m_y := 6; \sigma_x := 2; \sigma_y := 1.5; r_{xy} := 0.8$$

#Параметры двумерного Гаусса

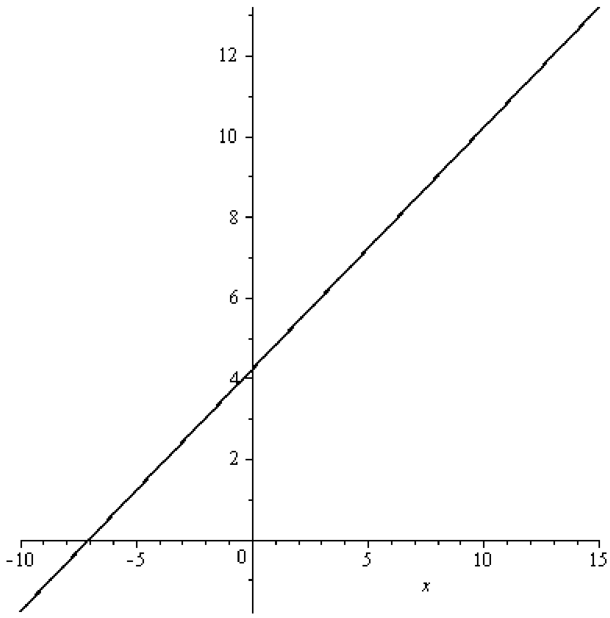
$$m_x := 3 \qquad m_y := 6 \qquad \sigma_x := 2 \qquad \sigma_y := 1.5 \qquad r_{xy} := 0.8$$

0.6826894920 0.9544997360 0.9973002039

$$\text{plot3d}\left(1\Big/\left(2\cdot\pi\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}+2\,r_{xy}\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\frac{(y-m_y)}{\sigma_y}\right)}, x=-10..15, y=-5..15, \text{axes}=\text{boxed}, \text{numpoints}=10000\right) =$$

#График двумерного нормального Гауссового распределения

$$> \text{plot}\left(m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-m_x\right), x=-10..15\right)\text{; \#Линия регрессии}$$



Если vwuts – последне 5 цифр номера зачётки\студенческого, то Индивидуальное задание:

n=30; p=0.7+0.01s; λ=t; a=u; b=u+a+1; m=w; σ=v

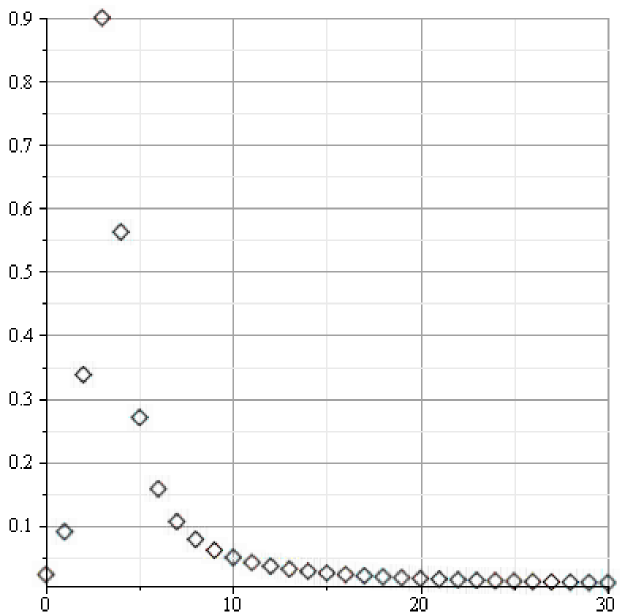
$m_x := m; m_y := m + 3; \sigma_x := \sigma; \sigma_y := 1.5\,\sigma; r_{xy} := 0.7 + 0.02\,s$

Схема повторных испытаний с переменной вероятностью успеха. Опционально!

$f := n \rightarrow \frac{0.225(n+1)}{1+(n-3)^2}$#пример непостоянной вероятности

$$n \rightarrow \frac{0.225\,(n+1)}{1+(n-3)^2}$$

```
> pointplot({seq([x, f(x)], x = 0 ..30)}, gridlines = true, color
      = blue, symbolsize = 20)
```



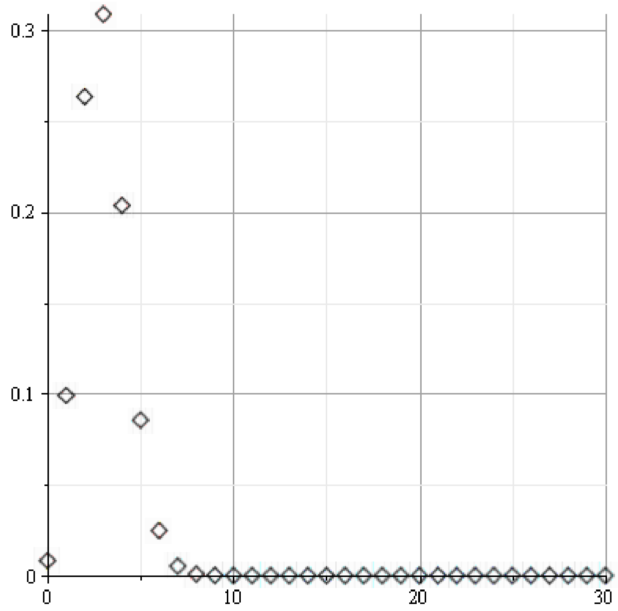
$$> \mathrm{expand}\left(\prod_{k=1}^{30}\left(1-f(k)+z\cdot f(k)\right)\right)$$

$$P_{30} := l \to \left(\frac{1}{l!}\frac{d^{l}}{d z^{l}}\,\mathrm{expand}\left(\prod_{k=1}^{30}\left(1-f(k)+z\cdot f(k)\right)\right)\right)\Bigg|_{z=0};$$

$P_{30}(3)$; pointplot$\left(\left\{\mathrm{seq}\left(\left[x, P_{30}(x)\right], x=0..30\right)\right\}\right.$, gridlines = true, color = blue, symbolsize = 20$\left.\right)$

$$l \to \left(\frac{\frac{\partial^{l}}{\partial z^{l}}\,\mathrm{expand}\left(\prod_{k=1}^{30}\left(1-f(k)+z f(k)\right)\right)}{l!}\right)\Bigg|_{z=0}$$

0.3089807542



M[ZETA]; add(j*P[30](j), j = 0 .. 30); sigma[ZETA] = sqrt(add((j-%)^2*P[30](j), j = 0 .. 30));

$$M_Z$$

$$2.988353914$$

$$\sigma_Z = 1.268906533$$

Лабораторная работа №2
Статистическая обработка элементов выборки из двумерной генеральной совокупности и проверка гипотезы о законах распределения

```
> restart
with(Statistics)
Digits := 4; N := 5; n := 25
                                        4       5       25
X := vector(n) : Y := vector(n) :
```

Чтение данных из файла

```
A := readdata("0", 1);
   #чтение данных из файла. Надо прописать путь к своему
   файлу. Обратите внимание на формат имени файла!!!
```

[25.43, 38.63, 34.23, 38.53, 47.62, 48.93, 53.28, 64.76, 51.09,
68.37, 69.57, 65.57, 81.95, 79.03, 71.80, 82.68, 83.97, 87.92,
89.93, 91.60, 99.13, 95.14, 98.98, 101.6, 102.8, 107.7, 112.7,
106.1, 107.8, 117.4, 119.3, 116.4, 123.5, 121.6, 118.6, 119.9,
119.5, 121.7, 125.0, 116.4, 122.8, 124.0, 131.4, 139.2, 128.4,
137.1, 133.3, 131.6, 130.7, 143.4, 131.2, 131.1, 128.2, 157.6,
148.6, 147.4, 137.6, 146.8, 145.2, 152.5, 137.5, 141.8, 146.6,
150.6, 154.1, 143.8, 148.7, 151.1, 151.6, 149.0, 144.5, 145.8,
140.3, 152.7, 157.4, 142.8, 150.7, 159.8, 153.0, 148.5, 167.9,
153.8, 163.1, 155.4, 148.7, 154.6, 149.9, 155.7, 156.2, 172.1,
159.0, 162.2, 138.0, 151.1, 144.5, 155.0, 151.8, 152.8, 161.5,
154.3, 148.9, 157.2, 148.1, 151.9, 159.5, 154.6, 161.1, 164.1,
140.6, 168.5, 155.5, 150.5, 153.0, 162.2, 158.9, 151.8, 155.4,
166.0, 156.8, 146.9, 158.6, 155.4, 165.4, 157.3, 168.8, 158.6,
148.8, 153.2, 161.8, 161.4, 157.1, 164.0, 160.6, 165.3, 156.1,
154.4, 159.6, 161.8, 168.1, 156.4, 164.8, 161.2, 160.5, 158.5,
162.8, 165.2, 157.2, 166.7, 157.4, 162.1, 159.8, 152.1, 157.9,
166.2, 160.1, 168.6, 161.6, 157.4, 159.0, 156.4, 150.4, 148.7,
154.9, 159.4, 155.9, 171.3, 154.1, 153.3, 166.5, 153.7, 151.4,
165.1, 166.3, 153.4, 145.3, 163.2, 170.4, 162.3, 164.6, 154.2,
154.6, 152.6, 170.4, 158.5, 160.3, 163.7, 164.8, 152.8, 167.7,
166.3, 164.0, 161.1, 155.8, 167.6, 169.9, 164.4, 158.9, 157.5,
171.0, 172.1]

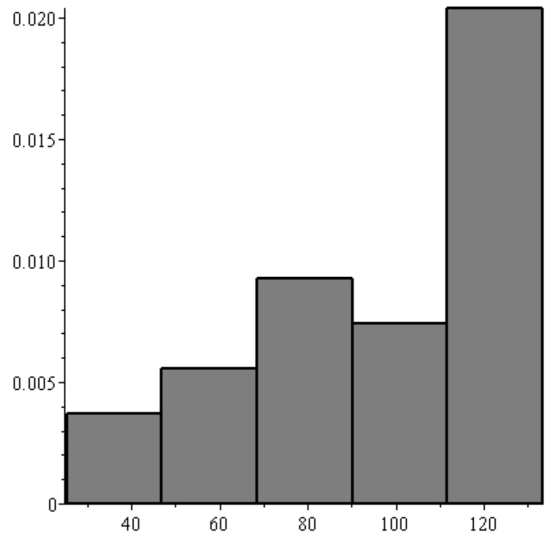
for i to 25 do $X[i] := A_{2i-1}$: $Y[i] := A_{2i}$: end do:

```
convert(X, list); a := min(%); b := max(%%); convert(Y, list); c
    := min(%); d := max(%%);
```

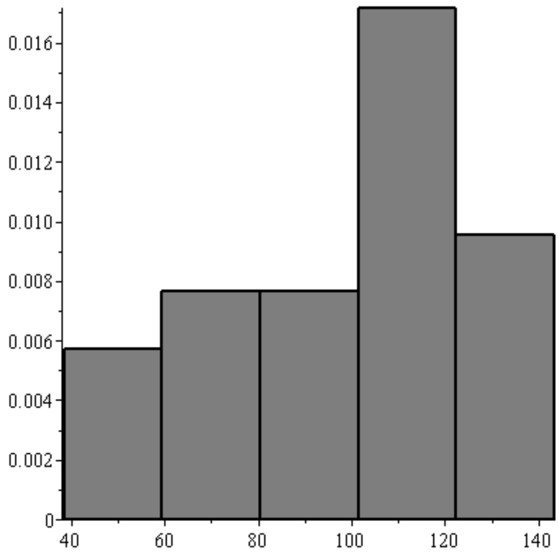
Графическое представление данных: гистограммы и облако точек

143.4

$> \mathrm{Histogram}(X, \mathrm{bincount} = N);\ H := \mathrm{Histogram}(X, \mathrm{bincount} = N)$



$\mathrm{Histogram}(Y, \mathrm{bincount} = N);\ Y := \mathrm{Histogram}(Y, \mathrm{bincount} = N)$



$P := \mathrm{ScatterPlot}(X, Y);\ \mathrm{plots}[\mathrm{display}](P)$

Точечные оценки средних и среднеквадратичных отклонений X и Y

$$mX := \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{n};\ mY := \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)}{n};\ i := 'i' : \mathrm{Mean}(X);\ \mathrm{Mean}(Y);$$

95.24 98.60 95.31 98.61

$$sigmaX := \sqrt{\frac{\left(\sum_{m=1}^{n}(X_m - mX)^2\right)}{n-1}};$$

32.89

$$sigmaY := \sqrt{\frac{\left(\sum_{l=1}^{n}(Y_l - mY)^2\right)}{n-1}};$$

31.06

StandardDeviation(X);

32.87

$s_1 = \sqrt{\text{Variance}(X)};$

Корреляция и прямая линейной регрессии

$s_1 = 32.86$

$$rXY := \frac{\sum_{i=1}^{25} \frac{(X_i - mX)\cdot(Y_i - mY)}{sigmaX \cdot sigmaY}}{n};$$

0.9408

$$Ax := \frac{rXY \cdot sigmaY}{sigmaX}$$

0.8884

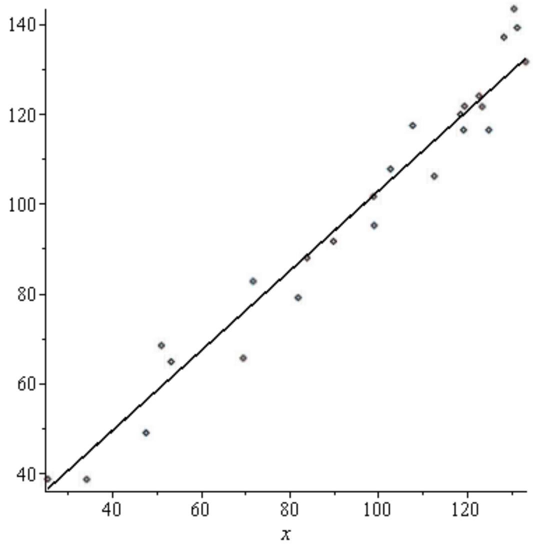
cov := Covariance(X, Y);

1000.

$$r_{XY} := \frac{cov}{sigmaX \cdot sigmaY}$$

0.9788

S := plot(Ax·(x − mX) + mY, x = a ..b);
> plots[display](P, S);



Доверительные интервалы для средних и среднеквадратичных отклонений X и Y (α= значимость)

$\alpha := 0.05;$

$$0.05$$

$t := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{StudentT}(n-1), 1-\frac{\alpha}{2}\right);$

$$2.064$$

$M_{min} := \mathrm{evalf}\left(mX - \frac{sigmaX \cdot t}{\sqrt{n}}\right);$

$$81.66$$

$M_{max} := \mathrm{evalf}\left(mX + \frac{sigmaX \cdot t}{\sqrt{n}}\right);$

$$108.8$$

$m(X) \in \left(M_{min}, M_{max}\right)$

$$\mathrm{in}(m(X), 81.66, 108.8)$$

$\varkappa := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{ChiSquare}(n-1), 1-\frac{\alpha}{2}\right);$

$$39.36$$

$\Delta_{min} := \sqrt{\frac{(n-1)sigmaX^2}{\varkappa}};$

$$25.69$$

$\chi := \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{ChiSquare}(n-1), \frac{\alpha}{2}\right);$

$$12.40$$

$$\Delta_{max} := \sqrt{\frac{(n-1)\mathrm{sigmaX}^2}{\chi}};$$

$$45.76$$

$$\sigma(X) \in \left(\Delta_{min}, \Delta_{max}\right);$$

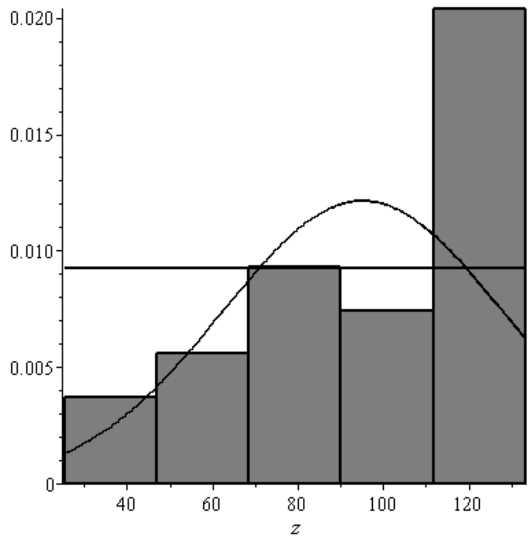
$$\mathrm{in}\left(\sigma(X), 25.69, 45.76\right)$$

Проверка гипотезе о нормальном и равномерном законе распределения X

$$\mathrm{in}\left(\sigma(X), 25.69, 45.76\right)$$

$$R := \mathrm{plot}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{sigmaX}} e^{-\frac{(z-\mathrm{mX})^2}{2\cdot(\mathrm{sigmaX})^2}}, z = a..b\right); L$$
$$:= \mathrm{plot}\left(\frac{1}{b-a}, z = a..b, \mathrm{color} = \mathrm{green}\right)$$

> plots[display](L, R, H)#` `Визуализация гипотез



> convert(X, set); # x-координаты в порядке возрастания

{25.43, 34.23, 47.62, 51.09, 53.28, 69.57, 71.80, 81.95, 83.97, 89.93, 98.98, 99.13, 102.8, 107.8, 112.7, 118.6, 119.3, 119.5, 122.8, 123.5, 125.0, 128.4, 130.7, 131.4, 133.3}

$$> h := \frac{(b-a)}{N}$$

$$h := 21.58$$

for k from 0 to N − 1 do print(a + k·h, a + (k + 1)·h)end do
 # Расчет границ интервалов на гистограмме X

$$25.43, 47.01$$

$$47.01, 68.59$$
$$68.59, 90.17$$
$$90.17, 111.8$$
$$111.8, 133.3$$

\> for k from 0 to N − 1 do $V_{k+1} := \mathrm{evalf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{(a+h\cdot k-mX)}{sigmaX}}^{\frac{(a+h\cdot(k+1)-mX)}{sigmaX}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right)$ end do;

\# Теоретические вероятности нормального распределения

$$V_1 := 0.05443 \quad V_2 := 0.1375 \quad V_3 := 0.2297 \quad V_4 := 0.2538 \quad V_5 := 0.1841$$

Эмпирические частоты статистики на интервалах гистограммы X

$$PP := \left[\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right]$$

\# В числителе i-той дроби- число точек, попавших в i-тый интервал, знаменатель равен n

$$\left[\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right]$$

$$X_V := n \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(PP_i - V_i\right)^2}{V_i}; \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{ChiSquare}(N-2-1), 1 - \alpha\right);$$

$$5.122 \qquad 5.991$$

$X_V >$ Quantile $\Rightarrow$ гипотеза нормальности отвергается

$$X_U := n \cdot N \cdot \left(\sum_{i=1}^{N}\left(PP_i - \frac{1}{N}\right)^2\right); \mathrm{evalf}(\%); \mathrm{Quantile}\left(\mathrm{ChiSquare}(N - 2 - 1), 1 - \alpha\right);$$

$X_U >$ Quantile $\Rightarrow$ гипотеза равномерности отвергается

$$\frac{16}{5} \qquad 3.200 \qquad 5.991$$

Проверка гипотезе о показательном законе распределения Y

$$P := \mathrm{plot}\left(\frac{1}{mY - c} e^{\frac{-z + c}{mY - c}}, z = c\,..d\right);$$

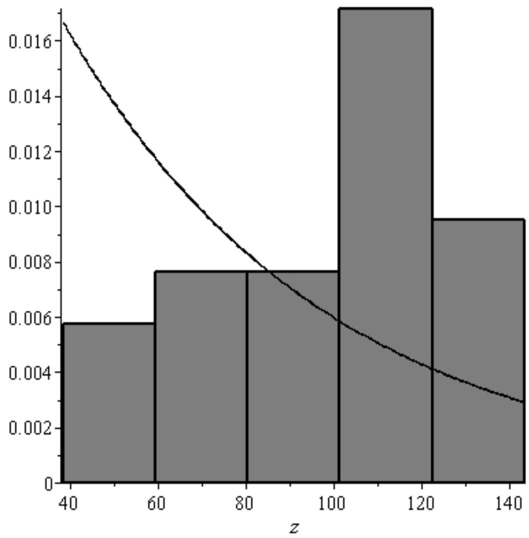
> plots[display](P, Y) #` `Визуализация гипотезы

> convert(Y, set); # y-координаты в порядке возрастания

{38.53, 38.63, 48.93, 64.76, 65.57, 68.37, 79.03, 82.68, 87.92, 91.60, 95.14, 101.6, 106.1, 107.7, 116.4, 117.4, 119.9, 121.6, 121.7, 124.0, 131.6, 137.1, 139.2, 143.4}

$$\eta := \frac{(d - c)}{N}$$

20.98



for k from 0 to N − 1 do print$(c + k\cdot\eta,\ c + (k + 1)\cdot\eta)$end do
# Расчет границ интервалов на гистограмме X

Эмпирические частоты статистики на интервалах гистограммы Y

38.53, 59.51

59.51, 80.49

80.49, 101.5

101.5, 122.4

122.4, 143.4

$$QQ := \left[\frac{16}{25}, \frac{4}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{2}{25}\right]$$

В числителе i-той дроби- число точек, попавших в i-тый интервал, знаменатель равен n

$$\left[\frac{16}{25}, \frac{4}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{2}{25}\right]$$

for k from 0 to $N - 1$ do $W_{k+1} := e^{-\frac{k \cdot \eta}{-c + mY}} - e^{-\frac{(k+1) \cdot \eta}{-c + mY}}$ end do

Теоретические вероятности показательного распределения

0.2948 0.2079 0.1467 0.1033 0.0728

$$X_W := n \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(QQ_i - W_i\right)^2}{W_i}; \text{Quantile}\left(\text{ChiSquare}(N - 1 - 1), 1 - \alpha\right);$$

12.13 7.815

$X_W >$ Quantile $\Rightarrow$ гипотеза отвергается

Statistics:-Quantile $< 12.13 \Rightarrow$ гипотеза отвергается

Проверка гипотезе о равенстве средних X и Y

$$Q := \text{Quantile}\left(\text{StudentT}(2\,n - 2), 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

2.011

$$K := \frac{|mX - mY|}{\sqrt{\frac{(\text{sigmaX})^2}{n} + \frac{(\text{sigmaY})^2}{n}}}$$

0.3714

$K > Q \Rightarrow m(X) \neq m(Y)$; verify(K, Q, greater_than);

$2.011 < 0.3714 \Rightarrow m(X) \neq m(Y)$

false

Проверка гипотезе о равенстве среднеквадратичных отклонений X и Y (дробь Q составляется таким образом, что в числителе стоит большее число!)

$$F := \frac{(\text{sigmaX})^2}{(\text{sigmaY})^2}$$

1.122

$$Q := \text{Quantile}\left(\text{FRatio}(n-1, n-1), 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$2.269$$

$F > Q \Rightarrow \sigma(X) \neq \sigma(Y)$; verify(F, Q, greater_than)

$$2.269 < 1.122 \Rightarrow \sigma(X) \neq \sigma(Y)$$

false

Проверка гипотезе о равенстве нулю коэффициента корреляции

$$G := \frac{\text{Quantile}\left(\text{StudentT}(n-2), 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n - 2 + \left(\text{Quantile}\left(\text{StudentT}(n-2), 1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}}; r_{XY}$$

$$0.3961$$

$$0.9788$$

$|r_{XY}| > G \Rightarrow r_{xy} \neq 0$; verify$\left(|r_{XY}|, G, \text{greater_than}\right)$;

$$0.3961 < 0.9788 \Rightarrow r[xy] \neq 0$$

true

Подписано в печать 10.11.2016 г.

Печать офсетная	Формат 60x84/16	0,87 уч.-изд. л.
1,16 усл.печ.л.	Заказ № 117	Тираж 60 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательские услуги ООО «Имидж-студия Арина»
127051 Москва, М. Сухаревская пл., д. 2/4 стр.1